УДК 519.222

КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ РЕЛИЗАЦИИ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ

COMBINED ALGORITHM OF THE REALIZATION OF THE METHOD OF LEAST MODULES

Голованов Олег Александрович, студент каф. «Прикладная математика», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: leonardomin-golovanov@yandex.ru, Тел.: +7(906)371-99-69
Классен Виктория Андреевна, студент каф. «Прикладная математика», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: classen.vika@yandex.ru, Тел.: +7(982)666-83-32

Oleg A. Golovanov, Student, Department «Applied mathematics», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: leonardomin-golovanov@yandex.ru, Тел.: +7(906)371-99-69
Viktoria A. Klassen, Student, Department «Applied mathematics», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: classen.vika@yandex.ru, Тел.: +7(982)666-83-32

Аннотация: Рассмотрены способы программной реализации приближенного метода вычисления оценок наименьших модулей (метода Мудрова), комбинированного метода вариационно-взвешенных квадратичных приближений и покоординатного спуска и метода перебора для оценивания коэффициентов линейных регрессионных моделей. По результатам исследования выявлено, что среднеквадратичное отклонение при вычислении коэффициентов линейной функции y(x)=kx+b+ε в комбинированном методе меньше, чем при вычислении коэффициентов методом Мудрова.
Abstract: The methods of software realization of the approximate method of calculating the estimates of the smallest modules (the Mudrov method), the combined method of variational-weighted quadratic approximations and coordinate-wise descent, and the method of search for estimating the coefficients of linear regression models are considered. Based on the results of the study, it was found that the root-mean-square deviation in calculating the coefficients of the linear function y (x) = kx + b in the combined method is less than in calculating the coefficients by the Mudrov method.
***Ключевые слова*:** регрессионная модель; метод наименьших модулей; метода Мудрова; покоординатный спуск; среднеквадратичное отклонение; метод перебора; метод наименьших квадратов.
***Key words*:** Regression model; The method of least modules; Mudrov's method; Coordinate descent; Root-mean-square deviation; Method of search; least square method.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время актуальны вопросы, связанные с аппроксимированием точек на плоскости для вычисления коэффициентов функции. Инженеры-технологи, инженеры-конструкторы, математики очень часто используют различные методы аппроксимации для усреднения каких-либо измерений.

Цель данной работы заключается в рассмотрении и программной реализации этих методов, в нахождении оптимальных коэффициентов функции и в продвижении дальнейшего применения данных методов при анализе экспериментальных данных.

В данной работе рассмотрены такие методы аппроксимации, как: метод наименьших квадратов, комбинированный метод вариационно-взвешенных квадратичных приближений и покоординатного спуска, метод перебора массивов коэффициентов функции для вычисления оптимальных результатов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную функцию

$$y(x) = kx + b + \varepsilon$$

где $y(x)$ - линейная зависимость y от x, k и b - коэффициенты данной функции, ε - случайная ошибка.

Первый метод, реализованный в данной работе, называется методом перебора, [1]. Это простейший из методов аппроксимации для поиска значений линейной функции, заключающийся в переборе массива значений k и b, с целью нахождения наименьшей суммы и коэффициентов этой суммы:

$$s = \sum_{m=1}^{n} (y_m - kx_m - b)$$

Где x - случайная величина, $y = kx + b + \varepsilon$ (ε - случайно сгенерированная ошибка в диапазоне (-1/2;1/2)),

$$k = (y_j - y_i)/(x_j - x_i), b = y_i - kx_i, \ \forall i, j <= n$$

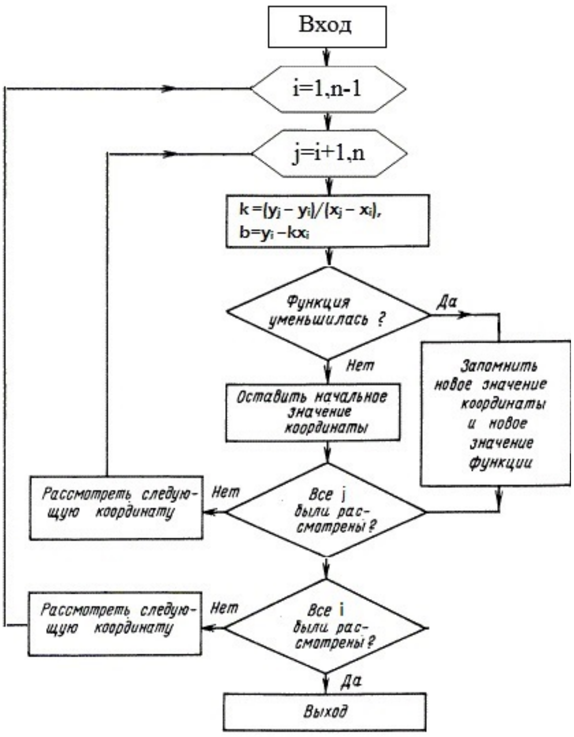

Рис. 1. Блок-схема алгоритма метода перебора

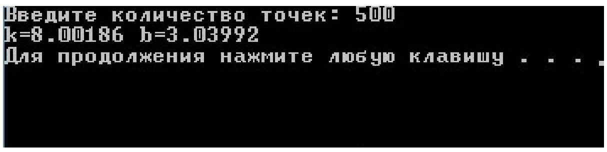

Рис. 2. Пример работы алгоритма метода перебора

В данном методе вычислительные погрешности незначительны (Рис.2.), но он не является наилучшим в связи с экспоненциальным ростом вычислительных затрат при росте n, из-за чего целесообразнее прибегнуть ко второму методу вычисления данных коэффициентов.

Второй метод – комбинированный, который включает в себя методы:

1. Наименьших квадратов
2. Вариационно-взвешенных квадратичных приближений (метод Мудрова)
3. Покоординатного спуска

Метод наименьших квадратов (МНК) — математический метод [1,3], применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных. Он может использоваться для «решения» переопределенных систем уравнений (когда количество уравнений превышает количество неизвестных), для поиска решения в случае обычных (не переопределенных) нелинейных систем уравнений, для аппроксимации точечных значений некоторой функции. МНК является одним из базовых методов регрессионного анализа для оценки неизвестных параметров регрессионных моделей по выборочным данным.

В МНК вычисляется:

$$k = (n * sumXY - (sumX * sumY))/(n * sumX2 - \\ - sumX * sumX),$$
$$b = (sumY - k * sumX) / n.$$

Где:

$$sumXY = \sum_{i=1}^{n} (x_i * y_i), sumX = \sum_{i=1}^{n} (x_i),$$
$$sumY = \sum_{i=1}^{n} (y_i), sumX2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i * x_i).$$

Метод наименьших модулей (МНМ) или метод Мудрова [1,2,4] — один из методов регрессионного анализа для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащих случайные ошибки. МНМ применяется также для приближённого представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений.

МНМ похож на метод наименьших квадратов. Отличие состоит в минимизации не суммы квадратов невязок, а (взвешенной) суммы их абсолютных значений.

В МНМ вычисляется вес функции

$$p_i = \sum_{i=1}^{n} (1 / | y_i - b0_m - k0_m * x_i | + \varepsilon),$$

где ε – добавка равна 0,0001.

$$k0_m = (sumPXY * sumP - (sumPX * sumPY)) / \\ /(sumPX2 * sumP - sumPX * sumPX),$$
$$b0_m = (sumPY - k0_m * sumPX) / sumP. \forall m > 0$$

Где:

$$sumPXY = \sum_{i=1}^{n}(p_i * x_i * y_i), sumPX = \sum_{i=1}^{n}(p_i * x_i),$$

$$sumPY = \sum_{i=1}^{n}(p_i * y_i), sumPX2 = \sum_{i=1}^{n}(p_i * x_i * x_i),$$

$$sumP = \sum_{i=1}^{n}(p_i).$$

В методе покоординатного спуска, исходя из k и b, полученных в ходе работы метода Мудрова, вычисляем конечные коэффициенты. Поочередно изменяя k и b, прибавляя или вычитая Δ=0,0001, и, если полученная сумма с измененными коэффициентами меньше, чем наименьшая сумма, то эта сумма становится наименьшей и запоминается k и b, иначе, возвращаются предыдущие значения коэффициентов. Данная операция продолжается до тех пор, пока программа не зациклится, либо наименьшая сумма не станет меньше чем какой-либо малый коэффициент, в нашем случае 0,1.

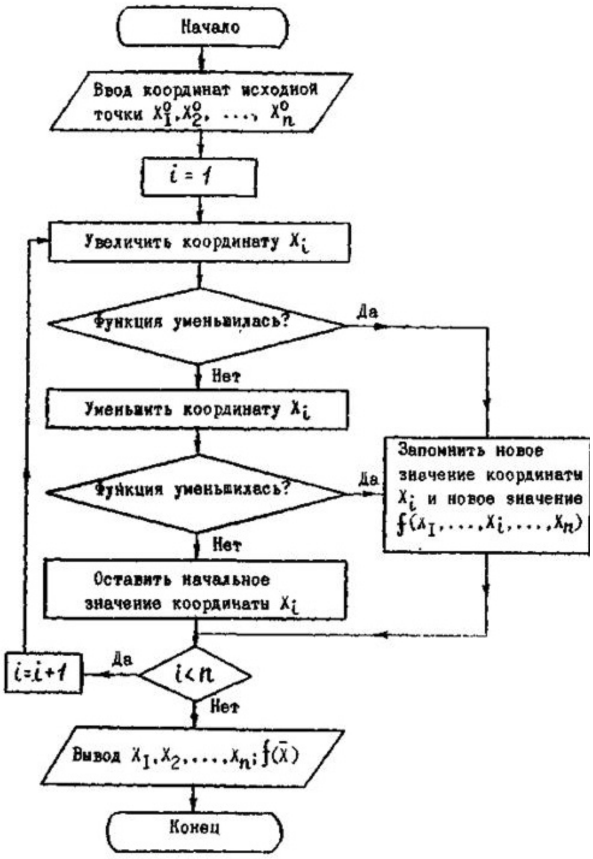

Рис. 3. Блок-схема алгоритма метода покоординатного спуска для одной переменной

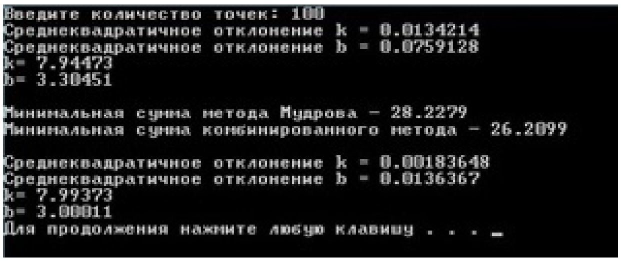

Рис. 4. Пример работы комбинированного алгоритма

Для того, чтобы рассчитать среднеквадратичное отклонение, найдем среднее значение коэффициентов k и b по формуле:

$$Mk = (1/n) * \sum_{i=1}^{n}(k_i), Mb = (1/n) * \sum_{i=1}^{n}(b_i).$$

Среднеквадратичное отклонение рассчитывается по формуле:

$$Dk = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}((k_i - Mk) * (k_i - Mk)) / n}$$

$$Db = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}((b_i - Mb) * (b_i - Mb)) / n}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ:

Как видно из полученных результатов точность вычисления k и b в комбинированном методе превосходит примерно в 5 раз точность вычисленных коэффициентов методом Мудрова. Но время, затраченное на работу программы комбинированного метода примерно в 3 раза больше, т.к. она проверяет большее число значений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тырсин А.Н., Максимов К.Е. Оценивание линейных регрессионных уравнений с помощью метода наименьших модулей // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78, № 7. С. 65-71.

2. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2005. 544 с.

3. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. – 2-е изд. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.

4. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование – 2-е изд. М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1967. 460 с.